УДК 681.3.06

Л. Б. КАЩЕЕВ, канд. техн. наук,
Т. С. ТЕЛЮПА, студентка НТУ «ХПИ»

ГРАФИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

У статті розглядається задача графічного відображення ітераційних процесів з комплексними числами. Розглядаються фрактальні зображення та їх практичне використання. Приділяється увага деяким ітераційним зображенням, подібним до примітивних біологічних структур.

В статье рассмотрена задача графического отображения итерационных процессов на комплексных числах. Рассматриваются фрактальные изображения и практическое применение. Уделено внимание итерационным изображениям, похожих на примитивные биологические структуры.

In the article is considered the task of graphic image of iteration processes on complex numbers. The images of fractals and practical application are examined. Attention iteration images are spared, look like primitive biological structures.

Введение. Увеличение вычислительной мощности персональных компьютеров позволяет практически реализовать все более сложные итерационные алгоритмы. Для многих из подобных задач (фракталы, L-системы и пр.) представляет интерес графическое отображение результатов.

Постановка задачи. Визуализация итерационных вычислений помогает оценить динамику хода процесса, очертить область интересующих нас результатов и в ряде случаев просто получить красивый зрительный образ. В этом плане наиболее интересными итерационными отображениями являются фрактальные изображения, получаемые при помощи многократно повторяемых действий над комплексными числами.

Описание алгоритма. Для построения простейшего фрактала на комплексной плоскости по горизонтальной оси откладывать реальные числа, а по вертикальной мнимые; каждому комплексному числу будет соответствовать точка на этой плоскости. Выбранное число возводится в квадрат и прибавляется какое-то фиксированное постоянное число. Это число тоже комплексное, то есть имеет действительную и мнимую части, подбирая которые мы можем регулировать процесс, получая самые причудливые картины. В зависимости от начального числа могут быть три варианта [1, 2]:

Модуль числа возрастает, уходит в бесконечность.

Модуль числа уменьшается и стремится к нулю.

При определенных начальных значениях модуль нового числа продолжает оставаться на некотором расстоянии от границы двух областей притяжения, а при отображении чисел на плоскости появляются специфические изображения.

Интересную форму группирования возводимых в квадрат комплексных чисел впервые подметил и описал Жюлиа в 1916 году [2, 3]. Простейшая итерационная формула

$$Z_{нов} = Z_{стар}^2 + C \tag{1}$$

соответствует так называемому множеству Жюлиа, рис.1.

Рисунок 1 – Множество Жюлиа

Множество Жулиа послужило отправной точкой для Бенуа Р. Мандельброта [3], математика из Исследовательского центра им. Томаса Уотстона при IBM, предложившего термин «фрактал» для описания объектов, структура которых повторяется при переходе к все более мелким масштабам.

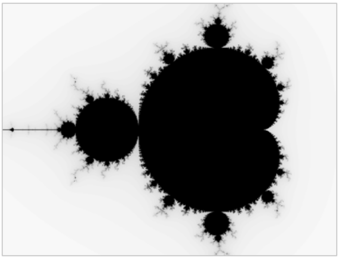


Рисунок 2 – Множество Мандельброта

Спектр применения фракталов довольно-таки обширен. Фракталами хорошо описываются процессы, относящиеся к механике жидкостей и газов. В химии с их помощью можно охарактеризовать процесс наращивания кристаллов. Также достаточно велика роль фракталов в машинной графике при генерации изображений природных объектов, существуют эффективные алгоритмы для сжатия изображения при помощи фракталов. Фракталы связаны и с биологией. Они применяются при моделировании популяций и исследовании процессов внутри организма (например, клеточное деление, биение сердца и др.) [3, 4].

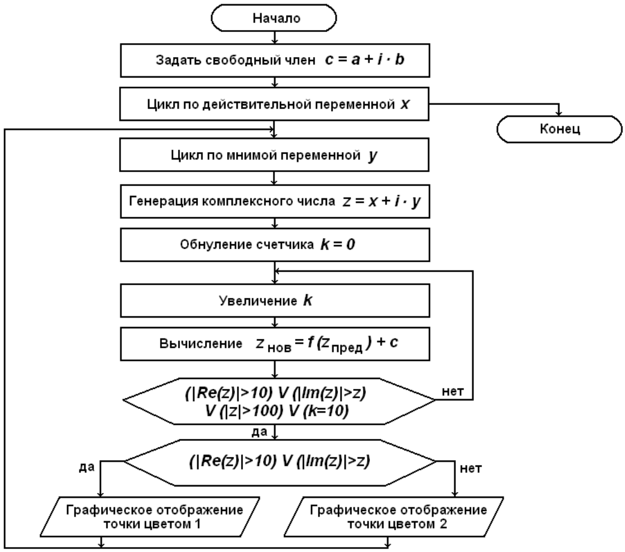


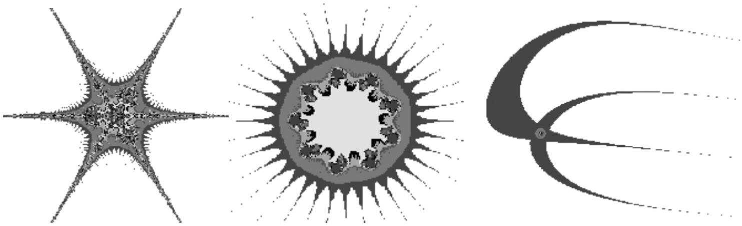
Рисунок 3 – Итерационный алгоритм построения фрактала

Графическое отображение некоторых фрактальных рисунков похоже на клеточные организмы. Это так называемые «биоморфы». Исследуя их можно изучать законы жизни моделируемых организмов, открывая у них черты, присущие настоящим клеткам. Известным исследователем этих причудливых и красивых графических объектов является К. Пикоувера, ученый из Исследовательского центра им. Томаса Уотсона в Йорктаун-Хейтсе.

Рассмотрим подробнее понятие биоморф. Это слово означает нечто похожее на живой организм. Биоморфы Пикоувера населяют комплексную плоскость. Каждый биоморф строится путем многочисленных итераций, или последовательных вычислений определенной математической функции, путем повторяющихся математических операций. На каждом шаге итерационного процесса результат предыдущего шага принимается за исходное значение переменной, то есть

$$z_{n+1} = f(z_n)\,. \tag{2}$$

Рассмотрим, например, биоморфы на рис.2. Можно использовать также другие формулы, которые будут влиять на общий вид биоморфа. Помимо приведенных на рис. 4 можно назвать $z_{n+1} = \sin(z_n) + e^{z_n} + c$; $z_{n+1} = z_n^5 + e^{z_n} + c$; $z_{n+1} = \sin(z_n) + z_n^2 + c$ и многие другие.



$z_{n+1} = \sin(z_n^3) + c$, $z_{n+1} = z_n^9 + c$, $z_{n+1} = z_n^z + z_n^3 + c$

Рисунок 4 – Биоморфы

Биоморфы на самом деле представляют собой сокращенную и по-другому раскрашенную версию множества Жюлиа. Пикоувер обнаружил биоморфы из-за ошибки в своей программе, с помощью которой он исследовал фрактальные свойства комплексных функций. Вместо *and* в процедуре принятия решения окраски точки белым или черным цветом он по ошибке написал *or*, из-за чего гораздо большее количество точек было окрашено в черный цвет. В частности, реснички и жгутики биоморфов состоят именно из таких точек.

Выводы. Начавшись как ошибка, процесс нахождения и исследования биоморфов со временем превратился в самостоятельное направление фрактальной математики. Вполне возможно, что биоморфы не только эффектно описывают внешний вид примитивных биологических объектов. В качестве гипотезы можно предположить, что внешний вид “неповторимых природных объектов” обусловлен тем, что их рост и размножение подчинено законам фрактальной математики. В любом случае компьютеры являются не только инструментом для математических расчетов в биологии, но и позволяют создавать виртуальные организмы с заданными свойствами. На данный момент существует большой математико-компьютерный потенциал для исследования живых организмов и их поведения, не последнее место в котором занимают итерационные вычисления.

Список литературы: ***1.*** *Морозов А. Д.* Введение в теорию фракталов.– Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с. ***2.*** *Федер Е.* Фракталы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с. ***3.*** *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М: Институт компьютерных исследований, 2002, 656с. ***4.*** *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных систем. – М.: Мир, 1993, 176 с.

Поступила в редколлегию 05.04.07